

Funkcje Analityczne - zadania z egzaminów

MB

Spis treści

1	Punkty osobliwe, bieguny	1
2	Przekształcenia, homografie	4
3	Pierwiastki wielomianów	7
4	Całki niewłaściwe	10
5	Całki po krzywych	13
6	Szeregi	17
7	Gałęzie	18
8	Różne	19

1 Punkty osobliwe, bieguny

Zadanie 1. Sklasyfikować izolowane punkty osobliwe w $\overline{\mathbb{C}}$ funkcji

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 4)^2} + z^2 \cos\left(\frac{1}{z}\right).$$

Obliczyć residuum funkcji f w 0 i w $2i$.

Zadanie 2. (S:Oh1) Funkcja $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ jest meromorficzna w całej sferze Riemanna $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ i spełnia następujące warunki:

1. $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{1, 2\})$ i f ma biegun rzędu 1 w punkcie 1, a rzędu 2 w punkcie 2;
2. $\text{res}_1(f) = 1$ i $\text{res}_2(f) = 2$;
3. $f(0) = -1$ i $f(3) = 1/2$.

Znaleźć postać ogólną funkcji f i zbadać, czy f może dodatkowo być ograniczona w otoczeniu punktu ∞ , a jeśli tak, to jaką wtedy ma postać.

Zadanie 3. Znajdź punkty osobliwe funkcji

$$f(z) = \frac{e^{i/z}(e^{iz} - i)}{\text{ctg}(z)}$$

w $\mathbb{C}$ i dla każdego z nich określ jego charakter. Dla każdego bieguna określ jego krotność.

Zadanie 4. Niech $\overline{\mathbb{C}}$ oznacza sferę Riemanna. Załóżmy, że $f \in M(\overline{\mathbb{C}})$ oraz spełnia następujące warunki:

- $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{1, 2\})$ oraz f ma biegun rzędu 1 w $z_0 = 1$ oraz biegun rzędu 2 w punkcie $z_0 = 2$,
- $\text{res}_1(f) = 1$, $\text{res}_2(f) = 2$,
- $f(0) = -1$, $f(3) = 1/2$.

1. Znajdź ogólną postać funkcji f .

2. Czy f może być ograniczona w otoczeniu punktu ∞ ? Jeśli tak, jaką ma wtedy postać?

Zadanie 5. Niech $U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\} \setminus \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\}$ i niech $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną mającą w każdym punkcie $\frac{1}{n}$ biegun lub osobliwość istotną. Wykazać, że dla każdego $c \in \mathbb{C}$ istnieje ciąg $z_n \in U$ taki, że $z_n \rightarrow 0$ oraz $f(z_n) \rightarrow c$.
Wskazówka: Dla $c \in \mathbb{C} \setminus f(U)$ rozpatrzyc funkcję $\frac{1}{f(z)-c}$.

Zadanie 6.

1. Wyznaczyć residua funkcji

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 4)^3}$$

w izolowanych punktach osobliwych.

2. Korzystając z metody residuów wyznaczyć całkę:

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2 + 4)^3} dx.$$

Zadanie 7. (S:E2023Z, Oh1) Załóżmy, że funkcja $F(z)$ jest funkcją meromorficzną na $\mathbb{C}$, która ma pojedyncze bieguny w punktach $z \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ oraz spełnia:

- $F(z+1) = z \cdot F(z)$ dla $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$,
- $F(1) = 1$.

Wyznacz $\text{res}_k(f)$ dla $k \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Zadanie 8. (S:Oh2) Niech $U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ i niech $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ będzie różnowartościową funkcją holomorficzną.

1. Wykazać, że jeśli f ma w zerze osobliwość pozorną, to $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) \notin f(U)$.
2. Wykazać, że jeśli f nie ma w zerze osobliwości pozornej, to ma w zerze biegun prosty.

Wskazówka: Skorzystać z faktu, że każda funkcja holomorphyzna przekształca otwarty zbiór spójny na zbiór otwarty lub w punkt. Dodatkowo, w punkcie 2., można rozpatrzeć funkcję $\frac{1}{f}$.

Zadanie 9.

1. Wyznaczyć izolowane punkty osobliwe funkcji

$$f(z) = \frac{z \cdot \exp(1/z^2)}{1 - z}$$

i wyznaczyć ich typ.

2. Dla każdego $r > 1$ wyznaczyć całkę

$$\int_{C(0,r)} f(z) dz,$$

gdzie $C(0, r)$ jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w punkcie 0 i promieniu r .

Zadanie 10. (S:E2021) Niech $f : D(0, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorphyzną, spełniającą następujące oszacowanie: istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego $z \in D(0, 1) \setminus \{0\}$ zachodzi

$$|f'(z)| \leq \frac{C}{|z|}.$$

1. Czy f może mieć biegun w punkcie 0?
2. Czy f może mieć istotną osobliwość w punkcie 0?

Zadanie 11. Niech $f : D(0, 1) \setminus \{0\}$ będzie funkcją holomorphyzną taką, że dla pewnej stałej $C > 0$ i dla każdego $z \in D(0, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$ zachodzi oszacowanie:

$$|f(z)| \leq C \cdot \ln \left(\frac{1}{|z|} \right).$$

Wykazać, że f ma w punkcie 0 pozorną osobliwość.

Zadanie 12. (S:Oh1) Rozważmy funkcje

$$g(z) = \frac{z^2(e^z - e^{-z})}{z - \sin(z)}, \quad f(z) = \frac{g(z)}{z^3}, \quad z \neq 0.$$

1. Uzasadnij, że funkcję g można przedłużyć do funkcji holomorphyznej $\tilde{g}$ w otoczeniu zera.
2. Niech $\tilde{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ będzie rozwinięciem funkcji $\tilde{g}$ w szereg potęgowy w otoczeniu $z = 0$. Wyznacz współczynniki c_0, c_1, c_2, c_3 .

Wskazówka: Wygodniej będzie użyć rozwinięć Taylora.

3. Wyznacz część główną funkcji f wokół zera, rodzaj osobliwości w zerze oraz residuum w zerze.

2 Przekształcenia, homografie

Zadanie 13. Niech $U = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| > 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Podać, z krótkim uzasadnieniem, przekształcenie konforemne

1. obszaru U na pas $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im}(z) < 1\}$,
2. obszaru $U \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 1\}$ na półkole $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Zadanie 14. Przypuśćmy, że funkcja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzna i przekształca pewien okrąg w okrąg. Wykazać, że istnieją $a \in \mathbb{R}, a > 0; b, c \in \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$f(z) = a(z + b)^n + c.$$

Wskazówka: Można sprowadzić do przypadku, gdy f przekształca okrąg jednostkowy na okrąg jednostkowy. Może się przydać zasada symetrii Schwarza.

Zadanie 15. (S:E2023Z)

1. Pokaż, że homografia postaci

$$h(z) = \frac{z + b}{z + d}$$

przekształca dysk jednostkowy na obszar $\mathbb{H}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b = -d$ oraz $|b| = 1$.

2. Dla dowolnie wybranych punktów $p \in D(0, 1), g \in D(0, 1) \setminus \{0\}$, pokaż, że istnieje holomorficzna suriekcja $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1) \setminus \{0\}$ taka, że $f(p) = g$.

Zadanie 16. Oznaczmy $\Omega = D(0, 1) \setminus \overline{D(1, \sqrt{2})}$.

1. Wyznacz obraz obszaru Ω przez homografię $h(z) = \frac{z+i}{z-i}$.
2. Znajdź odwzorowanie biholomorficzne przeprowadzające Ω na $D(0, 1)$.

Zadanie 17. (S:E2023) Oznaczmy $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ oraz $\Omega = \mathbb{H}_+ \cup D(0, 1)$.

1. Wyznacz obraz obszaru Ω przez homografię $h(z) = \frac{z-1}{z+1}$.
2. Znajdź odwzorowanie biholomorficzne przeprowadzające Ω na $D(0, 1)$.

Zadanie 18.

1. Wykazać, że homografia $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$ przekształca górną półpłaszczyznę

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

na koło jednostkowe $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Wyznaczyć przekształcenie odwrotne.

2. Niech $f : \mathbb{H} \rightarrow D(0, 1)$ będzie przekształceniem holomorficznym takim, że $f(i) = 0$. Wykazać, że dla każdego $z \in \mathbb{H}$ zachodzi nierówność:

$$|f(z)| \leq \left| \frac{i - z}{i + z} \right|.$$

Zadanie 19. Podać przykład holomorficznej bijekcji, która przeprowadza obszar $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 2\}$ na koło $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Przekształcenie to należy zadać bezpośrednim wzorem lub jako złożenie kilku przekształceń, z których każde jest zadane wzorem.

Zadanie 20.

1. Zbadaj, czy istnieje izomorfizm konforemny obszaru $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, z \neq 0\}$ na obszar $E = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| < 2, |\operatorname{Im}(z)| < 2, z \neq 1 + i\}$.
2. Znajdź izomorfizm konforemny obszaru $F = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ na obszar $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Zadanie 21. Niech K będzie wnętrzem kwadratu o wierzchołkach $\pm 2 \pm 2i$. Wykazać, że istnieje przekształcenie konforemne (czyli holomorficzna bijekcja) f zbioru K na zbiór K spełniające $f(0) = 1$. Czy takie przekształcenie jest tylko jedno?

Zadanie 22. Niech K będzie wnętrzem trójkąta

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z) < 3\}.$$

Wykazać, że istnieje przekształcenie konforemne (czyli holomorficzna bijekcja) f zbioru K na zbiór K spełniające $f(1 + i) = \frac{1}{2} + i$. Czy takie przekształcenie jest tylko jedno?

Zadanie 23. Podać przykład przekształcenia konforemnego, które przeprowadza koło $|z| < 1$ z usuniętym promieniem $[-1, 0]$ na koło $|z| < 1$. Przekształcenie to należy zadać bezpośrednim wzorem lub jako złożenie kilku przekształceń, z których każde jest zadane wzorem.

Zadanie 24. Niech $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ oznacza górną półpłaszczyznę płaszczyzny zespolonej.

1. Udowodnić, że jeśli h jest homografią, spełniającą warunek $h(\Pi) = \Pi$, to

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

dla $z \in \mathbb{C}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $ad - bc > 0$.

2. Udowodnić, że teza pozostanie słuszną, jeśli $h : \Pi \rightarrow \Pi$ jest przekształceniem biholomorficznym.

Zadanie 25.

1. Przeprowadzić biholomorficznie obszar $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) < 1, |z| > 1\}$ na dysk $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ tak, by obrazem $-2i$ było zero.
2. Obliczyć $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos(t))^2} dt$ oraz $\int_{|z|=1} z^3 \sin(z^{-2}) dz$ (okrąg $|z| = 1$ jest dodatnio zorientowany).

Zadanie 26. Niech

$$X = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\}.$$

Znajdź wszystkie homografie h takie, że $h(X) = X$.

Zadanie 27. Podać przykład holomorficznej bijekcji, która przeprowadza półkole

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

na obszar

$$\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg}(z)| < \pi/3\}.$$

Przekształcenie to należy zadać bezpośrednim wzorem lub jako złożenie kilku przekształceń, z których każde jest zadane wzorem.

Zadanie 28. Niech $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ będzie holomorficzna i taka, że $\operatorname{Re}(f(z)) \geq 0$ dla każdego $z \in D(0, 1)$ i $f(0) = 1$. Udowodnij, że

1. $\operatorname{Re}(f(z)) > 0$ dla $z \in D(0, 1)$,

2. $|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$,

3. $|f(z)| \geq \frac{1-|z|}{1+|z|}$,

Wskazówka do części zadania: znaleźć odpowiednią homografię h , która przekształca półpłaszczyznę $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ na dysk $D(0, 1)$ i rozważyć złożenie $h \circ f$.

Zadanie 29.

1. Niech U będzie obszarem zawartym między okręgami $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 1\}$ oraz $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 + i)| = 1\}$ i zawierającym punkt $\frac{1}{2}(3 + i)$. Podać przekształcenie konforemne U na półpłaszczyznę $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

2. Niech $f : D \rightarrow W$ będzie przekształceniem konforemnym koła $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ na otwarty zbiór wypukły $W \subseteq \mathbb{C}$, przy czym $f(0) = 0$. Wykazać, że dla $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\}$ zbiór $f(E)$ jest wypukły.

Wskazówka: Dla $a, b \in E$, $|a| \leq |b|$, $b \neq 0$ oraz $t \in [0, 1]$, zastosować (z uzasadnieniem) lemat Schwarza do funkcji $g(z) = f^{-1}((tf(\frac{a}{b}z) + (1 - t)f(z)))$ i rozpatrzyć $g(b)$.

Zadanie 30.

1. Określić przekształcenie konforemne obszaru zawartego między okręgami $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 2\}$ oraz $\{z \in \mathbb{C} : |z - 3i| = 1\}$, zawierającego punkt i , na pas $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$.

2. Niech $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ i niech $f : D \rightarrow D$ będzie funkcją holomorficzną taką, że dla pewnych $a, b \in D$, $a \neq b$, $f(a) = a$, $f(b) = b$. Wykazać, że $f(z) = z$ dla $z \in D$.

Wskazówka: Dla $g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$, gdzie $\phi(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, rozpatrzyć $g(0)$ oraz $g(\phi^{-1}(b))$.

Zadanie 31. Znaleźć wszystkie homografie, które przekształcają zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ na siebie.

3 Pierwiastki wielomianów

Zadanie 32. Uzasadnij, że wielomian $P(z) = z^5 + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 3z + 8$ ma dokładnie dwa pierwiastki (uwzględniając ich krotności) w zbiorze $\Omega = \{x \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Zadanie 33. Określić, podając krótkie uzasadnienie, liczbę pierwiastków, liczonych z krotnościami, wielomianu $z^5 + 4z^3 + z^2 + 1$ w

1. pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$,
2. półpłaszczyźnie $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Zadanie 34. Rozważmy wielomian $f(z) = z^5 + 12z^2 + 14$.

1. Ile pierwiastków wielomianu f (uwzględniając krotności) leży w dysku $D(0, 1)$, a ile w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$?
2. Ile pierwiastków wielomianu f (uwzględniając krotności) ma dodatnią część rzeczywistą?

Zadanie 35. (S:E2023Z, Oh1) Wyznaczyć liczbę pierwiastków wielomianu $P(z) = z^8 - 13z^5 + 7$ w:

1. pierścieniu $1 < |z| < 3$,
2. półpłaszczyźnie $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Zadanie 36. (S:0h1) Niech $P(z) = z^5 - z + 16$.

1. Pokaż, że wszystkie zera wielomianu P leżą w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.
2. Ile zer ma wielomian P w pierwszej ćwiartce płaszczyzny zespolonej?

Zadanie 37. Współczynniki wielomianów $P_1, P_2, \dots$ są liczbami zespolonymi, nadto dla każdej liczby naturalnej n stopień wielomianu P_n jest równy n . Funkcja całkowita g dana jest wzorem $g(z) = e^{3z}$ dla $z \in \mathbb{C}$. Załóżmy, że funkcje wielomianowe $P_n(z)$ zbiegają niemal jednostajnie na $\mathbb{C}$ do $g(z)$. Proszę udowodnić istnienie takiej liczby naturalnej N , że dla każdego $n \geq N$ wielomian P_n ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony w dysku $D(0, n) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < n\}$.

Zadanie 38. (S:E2024Z) Zbadać liczbę zer (uwzględniając krotności) wielomianu $P(z) = 4z^5 + 6z^2 + 1$ w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Zadanie 39. Niech $P(z) = z^5 + 15z + 1$.

1. Wykazać, że wielomian P ma dokładnie 4 pierwiastki jednokrotne w pierścieniu $\frac{3}{2} < |z| < 2$.
2. Wykazać, że wielomian P ma dokładnie jeden pierwiastek w obszarze $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Zadanie 40.

1. Wyznaczyć liczbę pierwiastków wielomianu $P(z) = z^7 + 6z^4 + 1$ w prawej półpłaszczyźnie, czyli w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

2. Wykazać, że równanie

$$e^z - (4z^2 + 1) = 0$$

ma dokładnie dwa pierwiastki w kole jednostkowym $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Zadanie 41. (S:E2021) Niech P będzie wielomianem $P(z) = z^9 + 4z^7 - z^2 + 8z + 1$.

1. Wyznaczyć liczbę pierwiastków wielomianu P w pierścieniu $1 < |z| < 10$.
2. Ile pierwiastków ma wielomian P w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re}(z) > 0$?
3. Ile pierwiastków ma wielomian P w pierwszej ćwiartce (tzn. $\operatorname{Re}(z) > 0$, $\operatorname{Im}(z) > 0$)?
4. Wyznaczyć liczbę pierwiastków wielomianu P w pierścieniu $1 < |z| < \frac{3}{2}$.

Zadanie 42. Proszę wyznaczyć wszystkie miejsca zerowe funkcji holomorficzej $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ danej wzorem

$$g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(4n)!}.$$

Proszę ustalić, jakiej są one krotności, a także ile z nich należy do dysku $D(0, 1000)$.
Wskazówka: Może przydać się badanie własności funkcji $h(z) = (e^z + e^{-z}) \cos(z)$.

Zadanie 43. Niech $f(z) = \frac{z}{e^z}$ dla $z \in \mathbb{C}$.

1. Wykaż, że dla każdej liczby $w \in K(0, \frac{1}{e})$ równanie $f(z) = w$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
2. Wykaż, że funkcja f **nie** jest różnowartościowa na kole $K(0, e)$.
3. (dodatkowe pkt) Wykaż, że f jest różnowartościowa na kole jednostkowym.

Zadanie 44. (S:E2023) Niech $P(z) = z^9 + 4z^7 - z^2 + 8z + 1$.

1. Wyznacz liczbę pierwiastków wielomianu P w pierścieniu $1 < |z| < 3/2$.
2. Pokaż, że P ma 4 pierwiastki w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re}(z) > 0$, przy czym dwa w pierwszej ćwiartce.

Zadanie 45. Znajdź liczbę zer (liczonych z krotnościami) wielomianu $f(z) = z^5 + 9z^3 - z^2 - iz - 2$:

1. w kole $K(0, 2)$,
2. w prawym półkolu $P = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Zadanie 46. Niech $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Wykazać, że równanie

$$(1 - z)^n e^z = \lambda(1 + z)^n$$

ma dokładnie n rozwiązań (licząc z krotnościami) w prawej półpłaszczyźnie.

Zadanie 47. Wyznaczyć liczbę pierwiastków wielomianu $p(z) = z^4 + z^3 + 1$ leżących w prawej półpłaszczyźnie $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Zadanie 48. (S:Oh1)

1. Ile pierwiastków wielomianu $z^{24} + 4z^2 + z + 1$, z uwzględnieniem ich krotności, leży w dysku $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, a ile w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 1, 1\}$?
2. Ile pierwiastków wielomianu $z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3$, z uwzględnieniem ich krotności, leży w pierwszej ćwiartce płaszczyzny $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$?

Zadanie 49. Wyznaczyć liczbę pierwiastków równania

$$z^7 + 2z^3 + 3z + 5 = 0$$

1. w prawej półpłaszczyźnie $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$,
2. w pierwszej ćwiartce $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Zadanie 50. (S:E2013, Oh1) Zbadać liczbę pierwiastków wielomianu $f(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ dla $z \in \mathbb{C}$:

1. w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$,
2. w półpłaszczyźnie $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$.

Zadanie 51. Wyznaczyć liczbę pierwiastków wielomianu

$$f(z) = z^6 + z^3 + 10z^2 + 10z + 8$$

w pierwszej ćwiartce, czyli w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ oraz w drugiej ćwiartce, czyli w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Zadanie 52. Ile pierwiastków ma równanie

$$z^4 + 8z^3 + 3z^2 + 8z + 3 = 0$$

w prawej półpłaszczyźnie?

Zadanie 53. Określić liczbę pierwiastków, liczonych z krotnościami, wielomianu $z^{10} - 4z^7 + 1$:

1. w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$,
2. w półpłaszczyźnie $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Zadanie 54. Proszę udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ wielomian

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^n \binom{2n}{2k-1} z^{2k-1} = \binom{2n}{1} z + \binom{2n}{3} z^3 + \cdots + \binom{2n}{2n-1} z^{2n-1}$$

ma $2n - 1$ parami różnych miejsc zerowych na płaszczyźnie zespolonej. Niech

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{z \in Z_n} (1+z)^{-2020},$$

gdzie Z_n to zbiór miejsc zerowych wielomianu P_n . Proszę wyznaczyć wartość granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ lub udowodnić jej nieistnienie.

Zadanie 55.

1. Określić liczbę pierwiastków, liczonych z krotnościami, wielomianu $z^7 + 5z^4 - 1$ w półpłaszczyźnie $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$.
2. Niech $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ i niech $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ będzie ciągiem funkcji holomorficznych, zbieżnych niemal jednostajnie do funkcji $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, która nie jest stała. Wykazać, że jeśli $f(0) = 0$, to istnieje n oraz $z \in D$ takie, że $f_n(z) = 0$.

Wskazówka: Wybrać (uzasadniając) koło $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $r < 1$, takie, że f nie przyjmuje zera w żadnym punkcie ∂D_r .

Zadanie 56. Ile pierwiastków w pierwszej ćwiartce ma wielomian

$$p(z) = z^5 + 2z + 1?$$

Zadanie 57. Ile pierwiastków o dodatniej części rzeczywistej ma wielomian

$$z^8 + z^5 + z^3 + 1?$$

Zadanie 58. Ile rozwiązań równania

$$2z^4 + 10z^2 + 1 = \sin(z)$$

spełnia $|z| < 3$?

Zadanie 59. Ile rozwiązań równania

$$z^3 + 12z^2 + 1 = e^z$$

spełnia $|z| < 2$?

Zadanie 60. Proszę wyznaczyć liczbę elementów zbioru:

1. $\{z \in \mathbb{C} : z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0, \operatorname{Re}(z) > 0\}$,
2. $\{z \in \mathbb{C} : z^{2015} + 3z = 1, |z| > 1\}$.

Zadanie 61. Wykazać, że równanie $e^z - 4z + 1 = 0$ ma w kole $|z| < 1$ dokładnie jedno rozwiązanie. Wykazać, że to rozwiązanie jest liczbą rzeczywistą.

Zadanie 62. Ile zer ma wielomian $z^{17} + z^{11} - iz + 1$ w pierwszej ćwiartce?

Zadanie 63. Dla liczby rzeczywistej $c \in [-20, 20]$ niech $P_c(z) = z^5 + 20z + c$. Proszę wyznaczyć moc zbioru $\{z \in \mathbb{C} : P_c(z) = 0, |\operatorname{Re}(z)| < 1\}$. Odpowiedź oczywiście musi zależeć od c .

4 Całki niewłaściwe

Zadanie 64. Wyznaczyć całki:

- 1.

$$\int_0^\infty \frac{x \sin(x)}{(1+x^2)^2} dx,$$

2.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx,$$

3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx,$$

4. (S:E2023)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1 + x + x^2} dx,$$

5. (S:E2024Z)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 + 2x + 5} dx,$$

6. (S:Oh2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1 + x^4} dx.$$

Zadanie 65. Wyznaczyć całkę:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + 1)^3} dx.$$

Zadanie 66. Wyznaczyć całkę:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$

Zadanie 67. Wyznaczyć całkę:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1 + x^2)^2} dx.$$

Zadanie 68. Obliczyć całkę:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^4 + 2x^2 + 1} dx.$$

Zadanie 69. (S:E2025P) To zadanie składa się z trzech podpunktów.

1. Proszę udowodnić istnienie takiej funkcji całkowitej g , że

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} z^3 \cdot g(z) = e^{iz} - 1 - iz + \frac{z^2}{2}.$$

2. Proszę obliczyć

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R g(t) dt,$$

przy czym R przyjmuje tu jedynie wartości dodatnie (a więc rzeczywiste).

3. Proszę obliczyć wartość całki

$$\int_0^{\infty} \frac{t - \sin(t)}{t^3} dt.$$

Zadanie 70. Obliczyć całkę:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 + 1} dx.$$

Zadanie 71. Obliczyć całkę:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^4 + 1} dx.$$

Zadanie 72. Proszę obliczyć wartość całki

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{s})}{(1+s)^2} ds.$$

Wynik należy przedstawić w postaci $ae^b\pi^c$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.

Zadanie 73. Obliczyć następujące całki niewłaściwe:

1.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^3} dx,$$

2.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^4 + 1} dx.$$

Zadanie 74. Wyznaczyć całkę

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(x)}{x^4 + 3x^2 + 2} dx.$$

Zadanie 75. Oblicz całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 - 2x + 5} dx.$$

Zadanie 76. Oblicz całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 - 4x + 5} dx.$$

Zadanie 77. (S:E2024Z) Znajdź maksymalny (w sensie inkluzji) obszar, na którym całka

$$f(z) = \int_{-\infty}^1 \frac{e^{z^2 t}}{2 - t} dt$$

definiuje funkcję holomorficzną.

Zadanie 78. (S:E2013, Oh1) Wyznaczyć wartość poniższych całek niewłaściwych, uzasadniając też ich istnienie:

1. Dla $a > 0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2} dx.$$

2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

5 Całki po krzywych

Zadanie 79. Oblicz całki:

1.

$$\int_0^\pi \frac{1}{5 + 3 \cos(x)} dx,$$

2.

$$\int_{C(2i,5)} \frac{z}{e^z - 1} dz,$$

3. (S:E2023Z)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos(\theta)},$$

4.

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \cos(t))^2},$$

5.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{3 \sin(x) - 5 \cos(x)} dx.$$

Zadanie 80. Proszę obliczyć

$$\int_\gamma \frac{e^z + i\sqrt{e} \sin(1/z)}{z^2 + 4} dz,$$

gdzie krzywa $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dana jest wzorem $\gamma(t) = \sin(t) + i \cos(t)$. Wynik końcowy należy wyrazić za pomocą liczb rzeczywistych, liczb e , i , π oraz działań elementarnych, bez całek, szeregów itp.

Zadanie 81. Przyjmijmy $\mathbb{R}_- = \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$ i niech $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$ będzie gałęzią główną logarytmu.

1. Znaleźć część rzeczywistą i urojoną funkcji $f(z) = (z - 1) \cdot \text{Re}(\text{Log}(z))$ i wyjaśnić, w jakich punktach funkcja f ma pochodną zespoloną.
2. Sprawdzić, że $z \cdot (\text{Log}(z) - 1)$ jest funkcją pierwotną dla $\text{Log}(z)$ i znaleźć całkę $\int_{[-i, 1]} \text{Log}(z) dz$.
3. Znaleźć całkę $\int_{[-i, 1]} \overline{\text{Log}(z)} dz$.

Zadanie 82. Znaleźć całki

$$\int_\gamma \frac{\sin(\pi e^{iz})}{(z - \pi)^2} dz,$$

gdzie

1. $\gamma(t) = \pi + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,
2. γ jest kawałkami liniową parametryzacją łamanej zamkniętej $[w_0, w_1] \cup [w_1, w_2] \cup [w_2, w_3] \cup [w_3, w_0]$, gdzie $w_0 = -i$, $w_1 = i$, $w_2 = 4$, $w_3 = -4 - i$.

Zadanie 83. Znaleźć całki

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z-2i)(1-\cos(z))} dz,$$

gdzie

1. $\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,
2. γ jest kawałkami liniową parametryzacją łamanej zamkniętej $[w_0, w_1, \dots, w_7, w_0]$ o wierzchołkach $w_0 = 1$, $w_1 = -2 + 3i$, $w_2 = 2 + 3i$, $w_3 = -2 - i$, $w_4 = 2 - i$, $w_5 = 2 + i$, $w_6 = -2 + i$, $w_7 = -i$.

Zadanie 84.

1. Wyjaśnić, w jakich punktach funkcja $f(z) = |e^z| \cdot \cos(iz)$ ma pochodną zespoloną.
2. Znaleźć całkę $\int_{[i\frac{\pi}{2}, \ln(2)]} \cos(iz) dz$.
3. Znaleźć całkę $\int_{[i\frac{\pi}{2}, \ln(2)]} \overline{\cos(iz)} dz$.

Zadanie 85. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$, $u = \operatorname{Re}(f(z))$, $v = \operatorname{Im}(f(z))$, będzie funkcją holomorficzną w kole $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ i niech $\operatorname{Re}((f(0))^2) = 0$. Pokazać, że

$$\int_0^{2\pi} (u(e^{it}))^2 dt = \int_0^{2\pi} (v(e^{it}))^2 dt.$$

Wskazówka: Rozpatrzyć wzór Cauchy'ego dla funkcji $(f(z))^2$.

Zadanie 86.

1. Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym, niech $z_0 \in U$. Załóżmy, że $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną taką, że $g'(z_0) \neq 0$. Wyjaśnić, że istnieje $r_0 > 0$ takie, że całka

$$\int_{C(z_0, r)} \frac{g'(z_0)}{g(z) - g(z_0)} dz$$

przyjmuje tę samą wartość dla wszystkich $r \in (0, r_0)$. Wyznaczyć tę wartość.

2. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości całki

$$\int_{C(a, r)} f(z) dz,$$

gdzie

$$f(z) = \frac{\sin(1/z)}{(z+1)(z-i)^2}$$

zaś $C(a, r)$ jest dowolnym dodatnio zorientowanym okręgiem nie zawierającym osobliwości funkcji f .

Zadanie 87. (S: E2021) Niech

$$f(z) = \frac{(z^2 - 2)(z + 3)^3}{(z^2 - 4)^2(z - 2i)^5(z - 10)^7}.$$

Wyznaczyć

$$\int_{C(0,5)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Zadanie 88. (S:E2021) Niech

$$f(z) = \frac{z^2 - 2}{(z - 4)^2(z - 3)}.$$

Wyznaczyć wszystkie wartości całek

$$\int_{C(a,r)} f(z) dz,$$

gdzie $C(a, r)$ jest dowolnym okręgiem nie przecinającym zbioru biegunów funkcji f . Czy f ma funkcję pierwotną w obszarze $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 10\}$?

Zadanie 89. Dla $R > 1$ krzywa $\gamma_R : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dana jest wzorem $\gamma_R(t) = Re^{it}$. Proszę obliczyć

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z - e^{iz}}.$$

Zadanie 90. Wyznaczyć całkę:

$$\int_{C(0,1)} (z - 1) \sin(1/z) dz.$$

Zadanie 91. Wyznaczyć całkę:

$$\int_{C(1,2)} \frac{z}{1 - \cos(2z)} dz.$$

Zadanie 92. Wyznaczyć całkę:

$$\int_{C(0,2)} \left(\frac{\cos(1/z)}{(1 - z)} + \frac{\cos(z)}{(1 - z)^3} \right) dz.$$

Zadanie 93. Obliczyć całkę:

$$\int_{C(0,3)} \frac{e^{2/z}}{z - 2} dz.$$

Zadanie 94. (S:Oh1) Policzyc całkę:

$$\int_{C(0,1)} z^3 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) dz.$$

Zadanie 95. Proszę obliczyć $\int_{\gamma} |z|^2 dz$, gdzie krzywa $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dana jest wzorem:

1. $\gamma(t) = 1 - t + ti$,
2. $\gamma(t) = e^{i\pi t/2}$.

Zadanie 96. Znaleźć całkę

$$\int_{\gamma} \frac{(\sin(z))^2}{(z - z_0)^2} dz,$$

gdzie γ jest kawałkami liniową parametryzacją łamanej zamkniętej $[w_0, w_1, w_2, w_3, w_0]$ o wierzchołkach $w_0 = 1 + i$, $w_1 = 1 - i$, $w_2 = -1 + i$, $w_3 = 2$. Rozpatrzeć kolejno przypadki $z_0 = \frac{1}{2}$ oraz $z_0 = -i$.

Zadanie 97. Obliczyć całkę:

$$\int_{C(0,1)} z^3 \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz.$$

Zadanie 98. Znaleźć całkę

$$\int_{\gamma} \frac{(\sin(z))^2}{(z - z_0)^2} dz,$$

gdzie γ jest kawałkami liniową parametryzacją łamanej zamkniętej $[w_0, w_1, w_2, w_3, w_0]$ o wierzchołkach $w_0 = -1 + i$, $w_1 = -1 + 3i$, $w_2 = 1 - i$, $w_3 = 1 + i$ oraz

1. $z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$,
2. $z_0 = 0$.

Zadanie 99. Znajdź wszystkie wartości, które może przyjąć całka

$$\int_{\gamma} \frac{z + i}{(z^2 + 1)^3} dz,$$

jeśli zakładamy, że γ może być dowolną krzywą zamkniętą kawałkami gładką, która nie przechodzi przez $\pm i$.

Zadanie 100. Znaleźć całkę

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z(1 - e^z)} dz,$$

gdzie γ jest kawałkami liniową parametryzacją łamanej zamkniętej $[w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_0]$ o wierzchołkach $w_0 = -i$, $w_1 = -1$, $w_2 = 7 + 8i$, $w_3 = -7 + 8i$, $w_4 = 1$.

Zadanie 101. Znaleźć całkę

$$\int_{\gamma} \frac{\operatorname{Log}(z)}{(z + 2i)(z^2 + 4)} dz,$$

gdzie γ jest kawałkami liniową parametryzacją łamanej zamkniętej $[w_0, w_1, w_2, w_3, w_0]$ o wierzchołkach $w_0 = 4 - 3i$, $w_1 = -2 - 3i$, $w_2 = 4 + 3i$, $w_3 = -2 + 3i$.

Zadanie 102. Znaleźć całkę:

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 \cdot \operatorname{Log}(z)}{(z - z_0)^3} dz,$$

gdzie γ jest kawałkami liniową parametryzacją łamanej zamkniętej $[w_0, w_1, w_2, w_3, w_0]$ o wierzchołkach $w_0 = 2$, $w_1 = -2 + 4i$, $w_2 = \frac{1}{2} + 4i$, $w_3 = \frac{1}{2}$ oraz

1. $z_0 = 3i$,
2. $z_0 = i$,
3. $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.

Zadanie 103. (S:E2013, Oh1)

1. Niech $f(z) = -\frac{1}{6}z^3 \sin(z) + e^{z^2} - \cos^2(z^2)$ i $g(z) = z \cdot \text{Log}(z^2 + 1) - z^3$. Znaleźć współczynniki $c_0, \dots, c_4$ rozwinięcia Maclaurina $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ oraz część główną rozwinięcia Laurenta funkcji f/g wokół zera.
2. Obliczyć całkę:

$$\int_{[0,1+i]} z \sin(\pi z^2) dz.$$

3. Obliczyć całkę

$$\int_{|z|=2} \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z} dz.$$

Zadanie 104. (S:E2025) Określmy $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem $\gamma(t) = 2e^{it}$. Proszę wyznaczyć wartość całki

$$\int_{\gamma} \frac{z^{2025}}{z^{2025} - 1} dz.$$

6 Szeregi

Zadanie 105. Przedstawić funkcję

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)^2}$$

w postaci sumy szeregu Laurenta w każdym możliwym pierścieniu o środku w 0. Znaleźć $\text{res}_{\infty}(f)$.

Zadanie 106. Udowodnij, że dla $a > 0$ zachodzi następująca równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a} \cdot \frac{\exp(\pi a) + \exp(-\pi a)}{\exp(\pi a) - \exp(-\pi a)} - \frac{1}{a^2} \right).$$

Wskazówka: Można skorzystać z twierdzenia o residuach.

Zadanie 107. Rozwiń funkcję

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - z - 2}$$

w szereg Laurenta w tym pierścieniu o środku w 0, do którego należy punkt $1 + i$ (podaj wzór na współczynnik przy z^n dla dowolnej liczby całkowitej n). Opisz pierścień zbieżności.

Zadanie 108. Niech f będzie funkcją holomorficzną w otoczeniu zera, spełniającą równość $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Wiedząc, że $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{k^2}{k^2+1}$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$, oblicz

$f^{(n)}(0)$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Zadanie 109. Wyznaczyć sumę

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Zadanie 110.

1. Wyznaczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2i}.$$

2. Wykorzystując uzyskany w punkcie 1. wynik, obliczyć sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + 4}.$$

Zadanie 111. Udowodnij, że wzór $\ln(\cos(z))$ definiuje funkcję analityczną $f(z)$ w otoczeniu $0 \in \mathbb{C}$. Dla rozwinięcia funkcji f w szereg potęgowy znajdź jego promień zbieżności.

Zadanie 112. (S:E2013) Obliczyć

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n^4 - 1)^{-1},$$

używając metod analizy zespolonej.

Zadanie 113. (S:Oh1) Uzasadnić istnienie sumy

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-1)^n \left(\frac{1}{w - n} + \frac{1}{n} \right),$$

gdzie $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ i wyznaczyć ją metodami analizy zespolonej.

7 Gałęzie

Zadanie 114. (S:Ol2) Wykazać, że w obszarze $U = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ istnieje holomorficzna gałąź pierwiastka kwadratowego z funkcji $z(z - 1)$, tzn. taka funkcja holomorficzna $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, że $(f(z))^2 = z(z - 1)$ dla każdego $z \in U$. Wybrać jedną taką funkcję i policzyć

$$\int_{C(0,4)} f(z) dz.$$

Zadanie 115. Rozważmy funkcję holomorficzną $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ daną wzorem $f(z) = 1 - z^2$. Czy istnieje holomorficzna gałąź pierwiastka z f , jeśli:

1. $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$?
2. $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$?

Zadanie 116.

1. Udowodnić, że dla dostatecznie dużych R istnieją w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ dokładnie dwie gałęzie pierwiastka kwadratowego z funkcji $f(z) = z^2 + 6z - 1$.
2. Oznaczmy przez g tę z powyższych gałęzi, która w punkcie $2R$ przyjmuje wartość rzeczywistą dodatnią. Znaleźć współczynniki c_0, c_1, c_{-1} rozwinięcia g w szereg Laurenta w wymienionym pierścieniu, oraz wyznaczyć całkę

$$\int_{|z|=2R} g(z) dz,$$

gdzie okrąg $|z| = 2R$ jest zorientowany dodatnio.

Zadanie 117.

1. Uzasadnić, że dla odpowiednio dużych R istnieje w obszarze $\Omega = \{|z| > R\}$ holomorphyzna gałąź pierwiastka kwadratowego z funkcji

$$f(z) = (z - 1)(z - 2),$$

to znaczy funkcja holomorphyzna $g : \Omega \rightarrow \Omega$ taka, że $g^2(z) = f(z)$.

2. Wybrać jedną z tych gałęzi, wyznaczyć współczynnik c_{-1} rozwinięcia funkcji g w szereg Laurenta w tym obszarze, oraz wyznaczyć całkę po dodatnio zorientowanym okręgu:

$$\int_{C(0,2R)} g(z) dz.$$

8 Różne

Zadanie 118. Funkcja $f : D(0, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ spełnia równanie $f(re^{i\alpha}) = re^{-i\alpha}$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $r \in (0, 1)$ oraz $\alpha \in [0, 2\pi)$. Proszę rozstrzygnąć, czy funkcja f jest holomorphyzna na zbiorze $D(0, 1) \setminus \{0\}$.

Zadanie 119. (S:E2025P) Niech $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ i niech $\varphi : \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ będzie taką funkcją holomorphyzną (na $\mathbb{H}_+$), że $\varphi(u) = i$ oraz $\varphi(\mathbb{H}_+) \subseteq \mathbb{H}_+$, tzn. $\forall_{z \in \mathbb{H}_+} \varphi(z) \in \mathbb{H}_+$. Proszę udowodnić, że $|\varphi'(z)| \leq 2025$.

Zadanie 120. (S:E2025P) Niech $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Proszę rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja holomorphyzna $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, że $\sup_{t \in (-1, 1)} |f(t)| < \frac{1}{2025}$, ale $\sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| > 2025$. Odpowiedź należy ściśle uzasadnić.

Zadanie 121. Proszę wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste $r > 1$, dla których istnieje taka funkcja holomorphyzna $\phi_r : D(0, r) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, że

$$\forall_{z \in \mathbb{C}: |z|=1} |\phi_r(z)| = |2z + 1|.$$

Wskazówka: Na okręgu jednostkowym zachodzi $|2z + 1| = |z + 2|$.

Zadanie 122. (S:E2025P) Niech $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jest całkowita, a ponadto $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(0) = 0$ oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{z \in \mathbb{D}} |f^{(n)}(z) - f(z)| \right) = 0,$$

przy czym $f^{(n)}$ oznacza tu n -tą pochodną (zespoloną) funkcji f . Proszę udowodnić, że $f(\pi) = 0$.

Zadanie 123. Przyjmijmy oznaczenia $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ oraz $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ dla $r \in (0, 1)$.

1. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną, $f(0) \neq 0$ i niech $m \geq 1$ będzie liczbą naturalną. Pokazać, że jeśli

$$|a| > \sup_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z^m} \right|,$$

to równanie $\frac{f(z)}{z^m} = a$ ma w kole D_r m pierwiastków, przy czym dla dostatecznie małych r - wszystkie jednokrotne.

Wskazówka: Zastosować zasadę argumentu do funkcji $\frac{f(z)}{z^m} - a$ i pętli $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

2. Niech $g : D \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną, mającą w zerze biegun rzędu m . Pokazać, że $m = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $r > 0$ takie, że g przekształca konforemnie $D_r \setminus \{0\}$ na $g(D_r \setminus \{0\})$.

Zadanie 124. Niech $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną w otwartym zbiorze spójnym U zawierającym $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Pokazać, że jeśli f nie jest funkcją stałą, to istnieje $z_0 \in \partial D$ takie, że $\operatorname{Re}(f(z)) < \operatorname{Re}(f(z_0))$ dla $z \in D \setminus \partial D$ i wykazać, że dla takiego punktu z_0 zachodzi $\operatorname{Im}(z_0 \cdot f'(z_0)) = 0$.

Zadanie 125. (S:E2025) Niech $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Proszę wyznaczyć zbiór wszystkich liczb zespolonych w o tej własności, że funkcja $\varphi_w : V \rightarrow \mathbb{C}$ określona wzorem $\varphi(z) = (1+z)^{-1} \cdot e^{wz} + (1-z)^{-1}$ ma na zbiorze V funkcję pierwotną.

Zadanie 126. Niech $U = \mathbb{C} \setminus \overline{D(0, 2)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$. Proszę rozstrzygnąć, czy funkcja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ dana wzorem $f(z) = (z^2 - (1+i)z + i)^{-1}$ ma na zbiorze U funkcję pierwotną.

Zadanie 127. Niech $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ i niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną taką, że $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$. Pokazać, że

$$|f'(z)| \leq \frac{4}{(1-|z|)^2}.$$

Wskazówka: Dla ustalonego $z \in D$ rozpatrzyć koło o środku w z i promieniu $\frac{1}{2}(1-|z|)$.

Zadanie 128. Niech $U = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| < 2\}$, $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \in [0, 1]\}$, $\partial G = \{z \in G : \operatorname{Re}(z) \in \{0, 1\}\}$ i niech $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną, ograniczoną na G .

1. Pokazać, że jeśli $|f(z)| \leq 1$ dla $z \in \partial G$, to także $|f(z)| \leq 1$ dla $z \in G$.

Wskazówka: Niech $\sup_{z \in G} |f(z)| = c$. Dla każdego $r > 0$ rozpatrzyc funkcję $\frac{f(z)}{1+rz}$ na prostokacie $\{z \in G : |\operatorname{Im}(z)| \leq \frac{c}{r}\}$.

2. Niech $\sup_{\operatorname{Re}(z)=0} |f(z)| = 1$ oraz $\sup_{\operatorname{Re}(z)=1} |f(z)| = 2$. Pokazać, że $\sup_{\operatorname{Re}(z)=\frac{1}{2}} |f(z)| \leq \sqrt{2}$.

Wskazówka: Rozpatrzyc funkcję $f(z) \cdot \exp(-z \ln(2))$ i skorzystać z pierwszego podpunktu.

Zadanie 129. Niech f będzie holomorficzna w kole $K(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Przypuśćmy, że $M = \sup_{z \in K(0, R)} |f(z)| < \infty$ i $f(0) = 1$. Wykazać, że $|f(z) - 1| \leq \frac{M+1}{R} |z|$.

Zadanie 130. (S:E2023Z) Załóżmy, że f jest holomorficzna na $D(0, 1)$ oraz spełnia $f(0) = 0$ i $\operatorname{Re}(f(z)) < 1$. Pokaż, że spełnione są następujące nierówności:

$$|f(z)| \leq \frac{2|z|}{1-|z|}, \quad |f'(0)| \leq 2.$$

Zadanie 131. (S:E2023Z, Oh1) Niech $Q \subset \mathbb{C}$ oznacza domknięty czworokąt (razem z wnętrzem) o wierzchołkach ± 1 , $(1 \pm i\sqrt{3})/2$ oraz niech $\Omega = \mathbb{C} \setminus Q$. Rozważmy następującą funkcję na obszarze Ω :

$$f(z) = \frac{z-1}{z^3+1}.$$

1. Niech γ będzie okręgiem o środku 0 i promieniu 2 ze standardową orientacją. Wyznacz wartość całki

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

2. Czy na zbiorze Ω istnieje holomorficzna gałąź funkcji $\log(f(z))$? Innymi słowy, czy na Ω istnieje funkcja holomorficzna g taka, że $\exp(g(z)) = f(z)$?

Zadanie 132. (S:E2024Z) Rozważmy funkcję

$$f(z) = \exp\left(\frac{10+z^2}{100-z^2}\right) \cdot \frac{(z+1)(z-3)}{(z-2i)(z+4i)}.$$

1. Znajdź wszystkie punkty osobliwe funkcji f i określ ich typ.
2. Niech $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 4\}$ oraz rozważmy drogę zamkniętą $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$, daną wzorem $\gamma(t) = \frac{7}{2} \exp(4\pi it)$. Wyznacz wartość całki

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

3. Czy na obszarze Ω istnieje holomorficzna gałąź funkcji $\log(f(z))$?

Zadanie 133. (S:E2023) Dla $R > 0$ niech $\Omega_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. Rozważmy funkcję holomorficzną $f(z) = z^2 + 6z + 1$.

1. Pokaż, że istnieje $R_0 > 0$ takie, że na obszarze Ω_{R_0} istnieją dokładnie dwie gałęzie pierwiastka kwadratowego z funkcji f .

Uwaga: Gałęzią pierwiastka kwadratowego z funkcji f na Ω_R nazywamy funkcję ciągłą g określoną na Ω_R , która spełnia $(g(z))^2 = f(z)$.

2. Niech g oznacza gałąź pierwiastka kwadratowego z f określoną na Ω_{R_0} , która przyjmuje wartość rzeczywistą dodatnią w punkcie $z = 2R_0$. Pokaż, że funkcja $h(z) = \frac{g(z)}{z}$ ma usuwalną osobliwość w nieskończoności.
3. Niech g będzie taka jak w poprzednim punkcie. Załóżmy, że

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

jest rozwinięciem funkcji g w szereg Laurenta na Ω_{R_0} . Wyznacz współczynniki a_0, a_1, a_{-1} .

4. Wyznacz wartość całki $\int_{\partial D(0, 2R_0)} g(z) dz$ (okrąg jest zorientowany dodatnio).

Zadanie 134. Rozważmy szereg:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{n+z}.$$

1. Dla każdego $N \in \mathbb{Z}_+$ rozważmy "ogon" powyższego szeregu

$$f_N(z) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{n+z}.$$

Uzasadnij, że szereg $f_N(z)$ definiuje funkcję holomorficzną na obszarze $\Omega_N = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > -N\}$.

2. Uzasadnij, że szereg f definiuje funkcję meromorficzną na $\mathbb{C}$ i wyznacz jej bieguny.
3. Rozważmy funkcję meromorficzną $g(z) = f''(z) - f'(z) + 2f(z)$. Dla $k \in \mathbb{Z}_+$ definiujemy ciąg liczb zespolonych

$$a_k = \int_{S(0, k+1/2)} g(z) dz,$$

gdzie $S(0, k+1/2)$ jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku 0 i promieniu $k+1/2$. Wyznacz granicę $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$.

Zadanie 135. (S:E2023) Załóżmy, że $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ jest holomorficzną.

1. Pokaż, że dla dowolnych $z_1, z_2 \in D(0, 1)$ zachodzi

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}z_2} \right|.$$

Wskazówka: Dla ustalonego z_1 , złóż f z odpowiednią homografią i skorzystaj z lematu Schwarza.

2. Pokaż, że dla dowolnego $z \in D(0, 1)$ zachodzi nierówność

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Zadanie 136. (S:E2023)

1. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem, który zawiera jednostkowy dysk domknięty $\overline{D(0, 1)}$. Załóżmy, że $f \in H(\Omega)$. Pokaż, że istnieje stała c taka, że dla dowolnego $|\lambda| < c$, równanie

$$z = \lambda \cdot f(z)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $z_0(\lambda)$ na dysku $D(0, 1)$.

2. Pokaż, że dla $|\lambda| < c$, gdzie c jest taka jak w poprzednim punkcie, zachodzi następująca równość

$$z_0(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n-1} g_n(z) \right]_{z=0},$$

gdzie $g_n(z) = f(z)^n \cdot (1 - \lambda f'(z))$.

Wskazówka: Policz na dwa sposoby całkę $\int_{\partial D(0,1)} z \cdot \frac{F'(z)}{F(z)} dz$, gdzie $F(z) = z - \lambda f(z)$.

Zadanie 137.

1. Niech $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ będzie niestałą funkcją holomorficzną taką, że $|f(z)| \leq 1$ dla każdego $z \in D(0, 1)$. Uzasadnić, że wówczas dla każdego $z \in D(0, 1)$ zachodzi $|f(z)| < 1$.
2. Niech f będzie funkcją określoną w pewnym zbiorze otwartym U zawierającym domknięte koło jednostkowe $\overline{D(0, 1)}$ i taką, że $f(D(0, 1)) \subset D(0, 1)$. Załóżmy dodatkowo, że dla pewnych $a, b \in D(0, 1)$, $a \neq b$ zachodzi

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Wykazać, że dla każdego $z \in D(0, 1)$ zachodzi nierówność:

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \cdot \left| \frac{z-b}{1-\bar{b}z} \right|.$$

Wskazówka: Warto wyznaczyć $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|$ i $\left| \frac{z-b}{1-\bar{b}z} \right|$ dla $a, b \in D(0, 1)$ i dowolnego z takiego, że $|z| = 1$.

Zadanie 138.

1. Sprawdzić, że funkcja

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 3x^2 + 3y^2 + 2x + y - 1$$

jest harmoniczna w $\mathbb{R}^2$. Wyznaczyć, jeśli istnieje, taką funkcję harmoniczną $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, że funkcja $f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$ jest holomorficzną funkcją zmiennej $z = x + iy$ w całej płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$.

2. Niech $D^* = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje harmoniczne $u : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że u jest niezmiennicza ze względu na obroty, tzn. dla każdego $t \in \mathbb{R}$ i dla każdego $z \in D^*$ zachodzi

$$u(e^{it}z) = u(z).$$

Wskazówka: Niech $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Przekształcenie $z \mapsto \exp(z)$ przekształca H na D^* . Warto rozpatrzyć funkcję $F : H \rightarrow \mathbb{R}$, określoną wzorem $F(z) = u(\exp(z))$. Ponadto, należy pamiętać, że liczbę zespoloną $z = x + iy$ utożsamiamy z punktem $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 139. Proszę rozstrzygnąć, czy dla każdej funkcji holomorficznej $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ istnieje taka funkcja holomorficzna $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, że $f(z) = \sin(g(z))$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$.

Zadanie 140. Niech $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ i niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną. Parami różne liczby zespolone $w_1, w_2, w_3, \dots$ należą do D oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$. Dla $n = 1, 2, 3, \dots$ niech

$$u_n = \frac{f(w_{n+1}) - f(w_n)}{w_{n+1} - w_n}.$$

Proszę rozstrzygnąć, czy z powyższych założeń wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = f'(0)$.

Zadanie 141. Niech $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

- Wykazać, że funkcja $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + \operatorname{Arg}(x + iy)$, gdzie $\operatorname{Arg}(z)$ jest argumentem liczby zespolonej z leżącym w przedziale $(-\pi, \pi)$, jest harmoniczna na zbiorze D .
- Znaleźć taką funkcję holomorficzną $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, że $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$ dla wszystkich $z = x + iy \in D$.

Zadanie 142. Niech $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną. Załóżmy, że f przyjmuje wartości rzeczywiste na odcinkach $[0, 1)$ oraz $[0, \exp(\pi i \sqrt{2}))$. Udowodnij, że f jest stała.

Zadanie 143. Czy istnieje taka funkcja holomorficzna $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$, że dla każdego $n = 1, 2, \dots$ zachodzi

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}?$$

Zadanie 144. (S:E2013) Niech wszystkie pierwiastki wielomianu P , gdzie $P(z) = \sum_{j=0}^n c_j z^j$ i $c_n \neq 0$, leżą w otwartym dysku jednostkowym D . Wyrazić przez $c_0, \dots, c_n$ całki

$$\int_{\partial D} z \cdot \frac{P'(z)}{P(z)} dz$$

oraz

$$\int_{\partial D} z^2 \cdot \frac{P'(z)}{P(z)} dz.$$

Zadanie 145. (S:E2013) Niech U będzie obszarem zawierającym domknięcie $\overline{D}$ dysku jednostkowego D , a funkcje $f, g \in H(U)$ niech będą takie, że $|f(z)| = |g(z)|$ dla wszystkich $z \in \partial D$.

- Udowodnić, że jeśli $f(z) \cdot g(z) \neq 0$ dla wszystkich $z \in \overline{D}$, to $f = c \cdot g$ dla pewnej stałej c o module 1.

2. Dowieść tego przy założeniu osłabionym do: $f(z) \cdot g(z) \neq 0$ dla wszystkich $z \in D$.

Zadanie 146. (S:E2013) Niech funkcja $f \in H(D)$, gdzie D jest otwartym dyskiem jednostkowym, spełnia warunek $f(D) \subset D$. Dowieść, że:

1. Jeśli $p \in D$ i $f(p) = 0$, to $f = b_p \cdot g$, gdzie $b_p(z) := \frac{z-p}{1-\bar{p}z}$ dla $z \in D$, zaś $g \in H(D)$ i $g(D) \subset D$ lub $g = \text{const}$.

Wskazówka: Modyfikować dowód lematu Schwarza.

2. Jeśli $p_1, \dots, p_n \in f^{-1}(0)$ są różne, to

$$|f(z)| \leq \prod_{j=1}^n |b_{p_j}(z)|$$

dla wszystkich $z \in D$.

Zadanie 147. Proszę rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja holomorphyzna $f : \mathbb{C} \setminus [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, taka że $(f(z))^3 = z - z^2$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]$.

Zadanie 148. Niech $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorphyzną taką że dla każdego nieograniczonego podzbioru $V \subset \mathbb{C}$ obraz $f(V)$ też jest nieograniczony. Rozstrzygnąć czy f musi być wielomianem.

Zadanie 149.

- Niech $D = D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, i niech $g : D \rightarrow D$ będzie przekształceniem holomorphyznym różnym od identyczności. Wykazać, że g ma co najwyżej jeden punkt stały w D . Podać przykład przekształcenia holomorphyznego $g : D \rightarrow D$, które nie ma punktu stałego w D .
- Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie jednospójnym obszarem nie będącym całą płaszczyzną. Niech $f : U \rightarrow U$ holomorphyczne przekształcenie różne od identyczności. Wykazać, że f ma co najwyżej jeden punkt stały w U .

Zadanie 150. Proszę wyznaczyć wszystkie punkty $z \in \mathbb{C}$, w których funkcja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dana wzorem

$$f(z) = |z^2| + i \cdot \text{Im}(z^2)$$

ma różniczkę zespoloną.

Zadanie 151. (S:E2025) Na zbiorze $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ określmy funkcję $\psi : \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem $\psi(z) = e^{iz} - 1$. Proszę udowodnić, że $|\psi(z)| \leq |z|$ dla wszystkich $z \in \mathbb{H}_+$.

Zadanie 152. (S:E2025) Niech $U = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z^2) < 1\}$. Załóżmy, że funkcje $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ oraz $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ są holomorphyczne na zbiorze U , a ponadto dla każdego $z \in U$ spełniona jest równość $\cos(f(z)) = \cos(g(z))$. Proszę udowodnić, że

$$\forall_{z \in U} \sin(f(z)) = \sin(g(z)) \text{ lub } \forall_{z \in U} \sin(f(z)) = -\sin(g(z)).$$

Zadanie 153. (S:E2025) Niech $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, a więc $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, a także niech $W = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$. Załóżmy, że funkcja $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ jest

holomorficzna na zbiorze W , a jej obraz $f(W)$ zawiera się w dysku $\mathbb{D}$. Proszę udowodnić, że $f'(2) \in \mathbb{D}$. *Za wykazanie jedynie tego, że $f'(2) \in \overline{\mathbb{D}}$, czyli nieco słabszej tezy, można otrzymać do 9 punktów.*

Zadanie 154. Proszę udowodnić, że jeśli P jest wielomianem stopnia 2015 o zespolonych współczynnikach, to funkcja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zadana wzorem $f(z) = P(\bar{z})$ nie jest holomorficzna.

Zadanie 155. Niech $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Proszę wyznaczyć wszystkie takie funkcje holomorficzne $\phi : D \rightarrow D$, że $\phi(z^2) = (\phi(z))^3$ dla każdego $z \in D$.